MA-2112: PRIMER PARCIAL Tipo B

Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Sartenejas Enero-Marzo 2021 TDD

Nombre:____. Carnet:____________________.

1. (12 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) ¿Es f continua en (0,0)?

   b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   c) ¿Es f diferenciable en (0,0)?

   d) Halle $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

2. (10 pts.) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $h = f \circ g$, sabemos que el plano tangente a la gráfica de f en el punto (3,2) contiene al origen. Además, conocemos que g es diferenciable tal que

$$g(0,0,0) = (3,2), \quad D_h(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Halle $h(0,0,0)$.

3. (10 pts.) Sea $f(x,y) = x^3 - 2x^2y - 2y^2 - z$

   a) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel 0 de f en (1,1,-3).

   b) Calcule la derivada direccional en el punto (1,1,-3) en al dirección que va desde (1,1,-3) a (2,1,2).

4. (13 pts.) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4$

   a) Halle los puntos críticos de f.

   b) Clasifique los puntos críticos.

   c) Calcule los valores máximos y mínimos globales de f en el disco unitario $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

SOLUCIÓN

1. Respondemos el inciso a): Para que f sea continua en el origen $\bar{0}$, debe cumplirse que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Dado que en ese punto la función cambia de expresión, no tenemos más opción que calcular el límite. Consideremos dos trayectorias:

- El haz de rectas $y = mx,\ m \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{x^2(mx)-(mx)^3}{x^2+(mx)^2}\right]$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{x(m-m^3)}{1+m^2}\right] = 0$$

- El haz de parábolas $y = mx^2,\ m \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx^2) = \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{x^2(mx^2)-(mx^2)^3}{x^2+(mx^2)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{mx^4 - m^3x^6}{x^2+m^2x^4}\right]$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{x^2(m-m^3x^2)}{1+m^2x^2}\right] = 0$$

Como el valor del límite es 0 por ambas trayectorias, podemos considerarlo como el posible valor del límite. Probemos utilizando coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\,\text{sen}\varphi \end{cases} \quad : f(x,y) = f(\varrho,\varphi)$$

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0} f(\varrho,\varphi) = \lim_{\varrho\to 0}\left[\varrho\cos\varphi - \frac{(\varrho\cos\varphi)^2(\varrho\,\text{sen}\varphi)-(\varrho\,\text{sen}\varphi)^3}{(\varrho\cos\varphi)^2+(\varrho\,\text{sen}\varphi)^2}\right]$$
$$= \lim_{\varrho\to 0}\left[\varrho\cos\varphi - \frac{\varrho^3(\cos^2\varphi\,\text{sen}\varphi - \text{sen}^3\varphi)}{\varrho^2}\right]$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0}\left[\varrho\cos\varphi - \varrho(\cos^2\varphi\,\text{sen}\varphi - \text{sen}^3\varphi)\right] = 0$$

Se ha demostrado entonces que $f(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$. Luego, como $f(0,0)=0$, se cumple que f es continua en el origen $\blacksquare$.

Una manera más convencional de demostrar que $f(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$, es suponer que le valor del límite es 0 y probarlo con la definición del límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0 : ||(x,y)|| < \delta \implies |f(x,y)| < \varepsilon$$

Partimos de $|f(x,y)|$

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \left|x - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right| < \left|x + \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right| \\
&< \left|x + \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|x + \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \\
&< \left|x + \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| < \left|x + \frac{y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| \\
|f(x,y)| &< |x+y| \leq |x| + |y|
\end{aligned}
$$

Luego, por la hipótesis, tenemos que

$$
||(x,y)|| < \delta \implies \sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies \begin{cases} |x| < \delta \\ |y| < \delta \end{cases}
$$

De esta manera,

$$
|f(x,y)| \leq |x| + |y| \implies |f(x,y)| < 2\delta
$$

Basta entonces con tomar $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon$ para que se cumpla la definición del límite y f sea continua en $\bar{0}$ ■.

Respondemos el inciso b): Las calculamos por definición:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h - \frac{h^2(0)-(0)^3}{h^2}\right) = 1 \ ■ \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(0 - \frac{(0)^2h-(h)^3}{h^2}\right) = 1 \ ■
\end{aligned}
$$

Respondemos el inciso c): Para que f sea diferenciable en el origen, las parciales deben existir en el punto (condición demostrada en el inciso anterior) y debe cumplirse el siguiente límite:

$$
L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y)\rangle|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0
$$

donde,

$$
\vec{\nabla} f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (1,1)
$$

Antes de probar el límite, simplificamos el argumento.

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y)\rangle|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\left|x - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} - \langle (1,1), (x,y)\rangle\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{\left|x - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} - (x+y)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{|x^2y - y^3 - (x^2+y^2)y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y)\rangle|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{2|y^3|}{(x^2+y^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Definimos

$$g(x,y) \equiv \frac{2|y^3|}{(x^2+y^2)^{3/2}} : L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

Estudiemos el límite para el haz de rectas $y = mx,\ m \neq 0$.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2|(mx)^3|}{[x^2+(mx)^2]^{3/2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2m^3\cancel{|x|^3}}{\cancel{|x|^3}(1+m^2)^{3/2}} \\ L &= \lim_{x\to 0} \frac{2m^3}{(1+m^2)^{3/2}} = \frac{2m^3}{(1+m^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Como $L = L(m)$, el valor del límite depende de la trayectoria y podemos deducir que el límite no existe por el teorema de unicidad del límite. Si el límite no existe, f no es diferenciable en el origen $\blacksquare$.

Respondemos el inciso d): Dado que f no es diferenciable en el origen, $\nexists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ $\blacksquare$.

---

2. Buscamos $h(0,0,0)$, pero debemos fijarnos que:

$$h(0,0,0) = f(g(0,0,0)) = f(3,2)$$

El problema se reduce a determinar el valor de $f(3,2)$. Sabemos que el plano tangente, Π, a la Graf(f) en el punto $(3,2)$ viene dado por

$$\Pi : z - f(3,2) = \left\langle \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Plano que contiene al origen:

$$0 - f(3,2) = \left\langle \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} \right\rangle \implies f(3,2) = \left\langle \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Debemos entonces calcular $\vec{\nabla} f(3,2) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2), \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2) \right) = (a,b)$. Para ello, utilizamos la regla de la cadena en su forma matricial.

$$\begin{aligned} h(0,0,0) = (f\circ g)(0,0,0) &\implies D_h(0,0,0) = D_f(g(0,0,0))D_g(0,0,0) \\ &\implies D_h(0,0,0) = D_f(3,2)D_g(0,0,0) \\ &\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a+b & a+2b \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \\ a+2b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \\ h(0,0,0) = (f\circ g)(0,0,0) &\implies \vec{\nabla} f(3,2) = (1,0) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$h(0,0,0) = f(3,2) = \langle (1,0), (3,2) \rangle = 3 \ \blacksquare$$

---

3. Respondemos el inciso a): La superficie de nivel de estudio es $\zeta_0(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$; tal que el plano tangente, Λ, en el punto (1,1,-3) viene dado por:

$$\Lambda : \left\langle \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Calculamos el gradiente evaluado en el punto de tangencia.

$$\vec{\nabla} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy \\ -2x^2 - 4y \\ -1 \end{pmatrix} \implies \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -2-4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De esta manera,

$$\Lambda : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Lambda : (x-1) + 6(y-1) + (z+3) = 0$$

$$\Lambda : x + 6y + z = 4 \ \blacksquare$$

Respondemos el inciso b): Primero determinamos el vector dirección, $\vec{\mathbf{v}}$, de la derivada. Como este vector comienza en $A(1,1,-3)$ y termina en $B(2,1,2)$, podemos determinar sus componentes en coordenadas cartesianas.

$$\vec{AB} = (2-1, 1-1, 2+3) = (1,0,5)$$

Forzamos que $\vec{\mathbf{v}}$ sea unitario.

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1+5^2}}(1,0,5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(1,0,5)$$

Ahora, resulta más calcular la derivada direccional utilizando el teorema que relaciona al gradiente en el punto con el vector dirección que utilizar la definición (implicaría calcular el límite).

$$D_{\vec{\mathbf{v}}} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \left\langle \vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

El teorema se cumple siempre y cuando f sea diferenciable en el punto. Dado que f tiene como dominio todo $\mathbb{R}^2$ y sus derivadas parciales (ya calculadas en el inciso anterior) son continuas, por ser funciones polinómicas, f es diferenciable en su dominio por teorema de funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, el teorema es aplicable:

$$D_{\vec{\mathbf{v}}} f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{5}{\sqrt{26}} = -\frac{6}{\sqrt{26}} \ \blacksquare$$

---

4. Respondemos el inciso a): Los puntos críticos de f son todos aquellos donde el gradiente de f es igual al vector nulo.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ 2y + 8y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x(1-2x^2) = 0 \\ y(1+4y^2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \ \vee \ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Los puntos críticos de f son entonces

$$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \ (x,y) = (0,0) \ \blacksquare$$

Respondemos el inciso b): Para clasificar los puntos críticos, utilizamos el criterio del hessiano. Calculamos la matriz hessiana.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2+24y^2 \end{pmatrix}$$

Entonces, el hessiano es:

$$\det(H_f(x,y)) = \begin{vmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2+24y^2 \end{vmatrix} = 4(1-6x^2)(1+12y^2)$$

Aplicamos el criterio a los tres puntos.

- $(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{cases} \det(H_f(0,0)) = 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \end{cases}$$

  El criterio indica que f alcanza un mínimo local para $(x,y) = (0,0)$ $\blacksquare$.

- $(x,y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

$$\begin{cases} \det\left(H_f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right) = -8 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -4 \end{cases}$$

  El criterio indica que $(x,y) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ son puntos de ensilladura $\blacksquare$.

Respondemos el inciso c): Ya estudiamos el interior del disco clasificando incluso los puntos críticos. Ahora debemos estudiar a f sujeta al contorno del disco $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ mediante el método de multiplicadores de Lagrange. Definimos $g(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$, tal que

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y),\ \vec{\nabla} g(x,y) \neq (0,0)$$

De esta manera,

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y) \implies \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ 2y + 8y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},\ (x,y) \neq (0,0)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(*)_1 \begin{cases} x - 2x^3 = \lambda x \\ y + 4y^3 = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2x^3 - \lambda x = x(1 - \lambda - 2x^2) = 0 \\ y + 4y^3 - \lambda y = y(1 - \lambda + 4y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(*)_1 \begin{cases} x - 2x^3 = \lambda x \\ y + 4y^3 = \lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies (*)_2 \begin{cases} x = 0 \ \vee \ 1 - \lambda - 2x^2 = 0 \\ y = 0 \ \vee \ 1 - \lambda + 4y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Evaluamos las condiciones de $x = 0$ e $y = 0$ de $(*)_2$ en el sistema $(*)_1$:

$$x = 0 \implies (*)_1 \begin{cases} 0 = 0 \\ y + 4y^3 = \lambda y \\ y^2 = 1 \end{cases} \implies (x, y) = (0, \pm 1)$$

$$y = 0 \implies (*)_1 \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2x^3 = \lambda x \\ x^2 = 1 \end{cases} \implies (x, y) = (\pm 1, 0)$$

Desarrollemos las dos condiciones restantes del sistema $(*)_2$.

$$\begin{cases} 1 - \lambda - 2x^2 = 0 \\ 1 - \lambda + 4y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2\lambda = -2 + 4x^2 \\ \lambda = 1 + 4y^2 \end{cases} \implies -\lambda = -1 + 4 \implies \lambda = -3$$

Evaluamos $\lambda = -3$ en el sistema $(*)_1$.

$$\begin{cases} x - 2x^3 = -3x \\ y + 4y^3 = -3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x(2 - x^2) = 0 \\ y(1 + y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies (x, y) = (0, \pm 1),\ (x, y) = (\pm 1, 0)$$

Hemos obtenido cuatro puntos que evaluaremos en f para determinar el máximo y el mínimo absoluto.

$$f(0, \pm 1) = 0 + (\pm 1)^2 - 0 + 2(\pm 1)^4 = 3$$
$$f(\pm 1, 0) = (\pm 1)^2 + 0 - (\pm 1)^4 + 2(0) = 0$$

Concluimos entonces que no existen máximo ni mínimo absoluto en el disco D ■.

Este parcial fue resuelto y digitalizado por Asxel Ramírez para GECOUSB

Asxel Ramirez
18-10322
Lic. Química
Twitter: @asx.0088

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección
gecousb@gmail.com